随 机 过 程 知 识 要 点

概率公式：$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

全概率公式：$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$

贝叶斯公式：$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)(B|A_k)}$

特征函数：$g(t) = E[e^{itX}] = \int_{\infty}^{-\infty} e^{itx}\ dF(x) \qquad g^{(k)}(0) = i^k X^k$

欧拉定理：$e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$

欧拉定理推广：$\cos tx = \frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2} \qquad \sin tx = \frac{e^{itx}-e^{-itx}}{2i}$

均值函数：$m_X(t) = EX(t)$

方差函数：$D_X(t) = B_X(t,t) = E[X(t) - m_X(t)]^2 = E[X(t)]^2 - (E[X(t)])^2$

协方差函数：$B_X(s,t) = E[\{X(s) - m_X(s)\}\{X(t) - m_X(t)\}]$

$\overset{\text{s 和 t 不相关}}{=\!=\!=\!=\!=} R_X(s,t) - m_X(t)m_X(s)$

相关函数：$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$

互协方差函数：$B_{XY}(s,t) = E[\{X(s) - m_X(s)\}\{Y(t) - m_Y(t)\}]$

互相关函数：$R_{XY}(s,t) = E[X(s)Y(t)]$

————	分布率或者概率密度	期望	方差	特征函数
0-1 分布	$P(X=1)=p, P(X=0)=q, p+q=1$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项式分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq	$((q+pe^{it})^n)$
泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\lambda>0$	λ	λ	$exp(\lambda(e^{it}-1))$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1}, p+q=1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	忽略
正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0\end{cases} \quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$

泊松过程

$$泊松过程定义：\begin{cases} 1 & X(0) \\ 2 & X(t)\ 是独立增量过程 \\ 3 & PX(t+s)-X(t)=n=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ 3' & \begin{cases} a & PX(t+h)-X(t)=1=\lambda h+o(h) \\ b & PX(t+h)-X(t)=2=o(h) \end{cases} \end{cases}$$

- **泊松过程协方差**：$B_X(s,t)=\lambda min(s,t)$
- 定理：设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是具有参数 λ 泊松分布 $\{T_n,n\geq 1\}$ 是对应的时间间隔，则随机变量 $\{T_n,n=1\ 2\ \cdots\}$ 是独立同分布的均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

马尔科夫链

- 定义：$P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$ 马尔科夫链未来状态与且仅与现在状态相关，与过去状态无关
- $P^{(n)}=P_{ij}^n$
- **CK-方程**：$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$
- **首中概率**：$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$ 点 i 出发首次到达 j 的概率
- $\begin{cases} f_{ii}=1 & 称状态\ i\ \textbf{常返} \\ f_{ii}<0 & 称状态\ i\ \textbf{非常返}，即以概率 1-f_{ii} 不再返回状态\ i \end{cases}$
- 对于常返态 $f_{ii}=1$ 有 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$ 由 i 出发返回到 i 的平均返回时间
- $\begin{cases} \mu_i<\infty & 常返态\ i\ 为\textbf{正常返} \\ \mu_i=\infty & 常返态\ i\ 为\textbf{零常返} \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{f_{ii}}{\mu_j}$
- 定理：如果 i，j 互通即 $i\leftrightarrow j$，则 i，j 同为常返或非常返，如同为常返则同为正常返或零常返。如果马链有一个零常返态，则定有无数个零常返态。
- 概率分布 $\{\pi_j,j\in I\}$ 为马链的平稳分布，满足 $\begin{cases} \pi_i & =\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij} \\ \sum_{j\in I}\pi_i & =1,\pi_j\geq 0 \end{cases}$
- 定理：不可约非周期马链是正常返 $\mu_i<\infty$ 的充要条件是存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布 $\{\frac{1}{\mu_j},j\in I\}$

连续时间马尔科夫链

- 定义：$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$ $$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n\}$$
- **CK-方程**：$p_j(t)=\sum_{i\in I}p_ip_{ij}(t)$
- **向前方程**：$P'(t)=QP(t)$ 即 $p'_{ij}=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}q_{jj}$

平稳随机过程

- **平稳过程** $\begin{cases}1.\{X(t),t\in T\}\text{是二阶距过程}\\ 2.\text{对任意}t\in T,m_xt=EX(t)=\text{常数}\\ 3.\text{对任意}t\in T,R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=R_X(s-t)\end{cases}$
- $\{X_n\}$ 均方收敛于 X，$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\quad E[|X_n-X|^2]=0\\ \underset{x\to\infty}{\text{l}\cdot i\cdot m}\,X_n=X\end{cases}$
- $\{X_n\}$ **均方收敛**充要条件是 $\lim_{n,m\to\infty}E[X_n\overline{X}_m]$ 极限存在
- t 点**均方连续**：$\lim_{h\to 0}E[|X(t+h)-X(t)|^2]=0$ 充要条件是 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t,t) 连续
- 均方连续则一定均方可积
- t 点**均方可微**：$\lim_{h\to 0}E[|\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)|^2]=0$ 充要条件是 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t,t) 广义二阶导数存在，即 $\frac{\partial^2R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$ 存在
- **各态历经性** $\begin{cases}<(X(t))> & =\underset{T\to\infty}{\text{l}\cdot i\cdot m}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\text{时间均值}\\ <X(t)\overline{X(t-\tau)}> & =\underset{T\to\infty}{\text{l}\cdot i\cdot m}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t-\tau)}dt\text{时间相关函数}\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}\underset{T\to\infty}{\text{l}\cdot i\cdot m}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt & =m_X\\ \underset{T\to\infty}{\text{l}\cdot i\cdot m}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t-\tau)}dt & =R_X(\tau)\end{cases}$

平稳过程谱分析

- **平均功率**：$\psi^2=\lim_{T\to\infty}E[\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}|X(t)|^2]dt=E[|X(t)|^2]=R_X(0)$
- **平均功率**等于谱密度在频域上积分：$\psi^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega$
- **谱密度**等于相关函数的傅里叶变换：$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$